MATHÉMATIQUES - II

CONCOURS ECRIN 1997

SERIE MP

Objet du Problème

L'objectif du problème est l'étude d'une méthode de résolution approchée de la solution d'une équation différentielle.
Dans la partie I, on met en place une méthode d'approximation exploitant des résultats d'algèbre linéaire.
Dans la partie II, on applique cette méthode à une équation différentielle linéaire pour obtenir des solutions approchées sous forme de polynômes trigonométriques.

Partie I

Description d'une méthode d'approximation

On suppose que H est un espace préhilbertien réel de dimension infinie, dont le produit scalaire est noté

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & \Phi(x,y)\,. \end{array}$$

E désigne un sous-espace vectoriel de H, et u une application linéaire de E vers H vérifiant les propriétés suivantes :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} (i) & (\forall\, x \in E)\,(\forall\, y \in E) \quad \Phi(x,u(y)) = \Phi(u(x),y) \\ (ii) & (\forall\, x \in E) \quad \Phi(x,u(x)) \geqslant 0 \\ (iii) & (\forall\, x \in E) \quad \left[\Phi(x,u(x)) = 0 \Rightarrow x = 0\right]. \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation linéaire

$$(I) \qquad u(y) = b$$

dans laquelle b désigne un élément donné de H et y un élément inconnu de E.
Dans tout le problème, on fait l'hypothèse que l'équation (I) admet au moins une solution dans E, notée y_0. On se propose d'approcher y_0 par un élément z d'un sous-espace vectoriel V de E.

I.1° Démontrer que l'application u est injective et en déduire que y_0 est la seule solution dans E de l'équation (I).

I.2° Vérifier que l'application

$$(x,y) \longrightarrow < x,y >= \Phi(u(x),y)$$

est un produit scalaire sur E. On notera $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie sur E par

$$(\forall\, x \in E) \qquad \|x\| = \sqrt{< x,x >}\,.$$

I.3° Soit V un sous-espace vectoriel de E (on ne suppose pas V de dimension finie).

On appelle solution approchée dans V de l'équation (I), ou encore pseudo-solution dans V de (I), tout élément $z \in V$ tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \|y - y_0\| \end{array}$$

présente un minimum absolu en z.
En général, l'existence d'un tel minimum n'est pas garantie.

I.3°.a) Démontrer l'égalité :

$$(\forall\,(x,x',x'')\in E^3)\qquad 2\left[\|x'-x\|^2+\|x''-x\|^2\right]=\|x'+x''-2x\|^2+\|x'-x''\|^2\ .\qquad (1)$$

En déduire, en raisonnant par l'absurde, que l'équation (I) admet au plus une pseudo-solution dans V.

On note $V^\perp$ l'orthogonal de V dans E pour le produit scalaire $<\ ,\ >$.

I.3°.b) Montrer que si z vérifie $z\in V$ et $(z-y_0)\in V^\perp$, alors z est une pseudo-solution dans V de l'équation (I).

I.3°.c) Réciproquement, montrer que si z est pseudo-solution dans V de l'équation (I), alors z vérifie $(z-y_0)\in V^\perp$.
(On pourra considérer les éléments de V de la forme $z+\lambda y$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $y\in V$.)

I.4° *On suppose dans cette question que V_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n\geqslant 1$.*

I.4°.a) Montrer qu'alors l'équation (I) admet une pseudo-solution et une seule dans V_n, notée z_n.

I.4°.b) On suppose que $\mathcal{B}_n=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de V_n. Pour $x\in V_n$, on note $x_1,\ldots,x_n$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_n$.
Etablir que x est égal à la pseudo-solution z_n de (I) dans V_n si et seulement si $(x_1,\ldots,x_n)$ est solution dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire qui s'écrit matriciellement

$$M_n X=B\qquad (2)$$

où $M_n=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la matrice carrée réelle d'ordre n de coefficients $m_{i,j}=<e_i,e_j>$,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}\Phi(e_1,b)\\ \vdots\\ \Phi(e_n,b)\end{pmatrix}.$$

I.4°.c) Justifier que M_n est une matrice inversible.

Partie II

Résolution approchée d'une équation différentielle linéaire

α et β désignent deux réels tels que $\alpha<\beta$.
Pour $p\in\mathbb{N}$, on note $C^p([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^p sur $[\alpha,\beta]$.
On cherche les fonctions $y:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $[\alpha,\beta]$ et telles que :

$$(II)\quad\begin{cases}(\forall\,x\in[\alpha,\beta]) & -y''(x)+a(x)\,y(x)=b(x)\\ y(\alpha)=\lambda\\ y(\beta)=\mu\end{cases}$$

où a et b sont deux applications continues de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$ et λ, μ deux réels.

II.1° Justifier qu'en fait les solutions de (II) sont toutes de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$.

II.2° *On se propose d'abord de montrer sur un exemple que l'existence ou l'unicité d'une solution du système (II) n'est pas assurée.*

On suppose, dans cette question seulement, que $\alpha=0$, $\beta=\pi$ et

$$(\forall\,x\in[0,\pi])\qquad a(x)=-1\quad\text{et}\quad b(x)=-x\ .$$

Déterminer l'ensemble des solutions de (II) dans chacun des cas suivants :

II.2°.a) $\lambda = \mu = 0$.

II.2°.b) $\lambda = 0$ et $\mu = \pi$.

On suppose dans la suite du problème que $\alpha = 0$, $\beta = 1$ *et* $\lambda = \mu = 0$. *On suppose de plus que pour tout* $x \in]0,1[$, *on a* $a(x) > 0$.

II.3° Soit H l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et E le sous-espace vectoriel de H défini par

$$E = \left\{ f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \ / \quad f(0) = f(1) = 0 \right\} .$$

On munit H du produit scalaire usuel

$$\Phi(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x .$$

On note u l'application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & H \\ f & \longrightarrow & -f'' + a f . \end{array}$$

II.3°.a) Pour f et g éléments de E, exprimer $\Phi(u(f),g)$ à l'aide d'intégrales où n'interviennent que les fonctions a, f, f', g et g'.

II.3°.b) Prouver que u vérifie les propriétés $(\mathcal{P})$ données au début de la partie **I**.

Ainsi, y est solution du système (II) si et seulement si y est un élément de E solution de l'équation (I) $u(y) = b$.
Conformément à l'hypothèse faite au début du problème et aux résultats de la question **I.1°**, *le système (II) admet une et une seule solution y_0 dans E.*

II.4° Approximation par des fonctions trigonométriques

Dans cette question, on se place dans le cas particulier où

$$(\forall\, x \in [0,1]) \qquad a(x) = b(x) = 1 .$$

Le système (II) s'écrit donc

$$(II) \quad \begin{cases} (\forall\, x \in [0,1]) & -y''(x) + y(x) = 1 \\ y(0) = y(1) = 0 . \end{cases}$$

II.4°.a) Expliciter l'unique solution y_0 du système (II).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, e_k désigne l'élément de E défini par

$$(\forall\, x \in [0,1]) \qquad e_k(x) = \sin(k\pi x) .$$

On note V_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_1,\ldots,e_n)$.

II.4°.b) Prouver que $\mathcal{B}_n = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base de V_n.

II.4°.c) En utilisant la question **I.4°.b)**, déterminer la pseudo-solution z_n dans V_n de l'équation (I) associée au système (II).

II.4°.d) La suite de fonctions $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
(On ne demande pas quelle est la limite de cette suite.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail